Introdução à teoria de coálgebras II

Prof. Dr. Lucio Centrone

28 de abril de 2016

Como definir coideal?

Seja $f : C \to D$ homomorfismo de coálgebras. Como $\epsilon_D \circ f = \epsilon_C$, então $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, \epsilon_C$. Ainda, $\Delta(\mathrm{Ker}\, f) \subset \mathrm{Ker}\,(f \otimes f) = \mathrm{Ker}\, f \otimes C + C \otimes \mathrm{Ker}\, f$. Isto nos justifica a seguinte definição.

Definição (Coideal)**.** . Seja (C, Δ, ϵ) coálgebra, diz-se que $I \subset C$ é coideal se $\epsilon(I) = 0$ e $\Delta(I) \subset I \otimes C + C \otimes I$.

Teorema. *(a) Seja I coideal de uma coálgebra (C, Δ, ϵ), então o espaço quociente C/I possui uma única estrtura de coálgebra tal que $\pi : C \to C/I$ é homomorfismo de coálgebras.*
(b) $Ker f$ é coideal de C e se $I \subset Ker f$ é coideal, então existe homomorfismo de coálgebras $F : C/I \to D$ tal que $F \circ \pi = f$.
(c) Se F é epimorfismo, então $I = Ker f$.

Definição (Produto tensorial)**.** Sejam C, D coálgebras tal que $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ e $\Delta(d) = d_{(1)} \otimes d_{(2)}$. Considere $C \otimes D$ e $\Delta : C \otimes D \to (C \otimes D) \otimes (C \otimes D)$ e $\epsilon : C \otimes D \to K$ tal que

- $\Delta(c \otimes d) = (c_{(1)} \otimes d_{(1)}) \otimes (c_{(2)} \otimes d_{(2)})$,
- $\epsilon(c \otimes d) = \epsilon(c)\epsilon(d)$.

$(C \otimes D, \Delta, \epsilon)$ tem estrutura de coálgebra dita **produto tensorial de** C **em** D.

Lema. *Seja (A, m, η) álgebra e seja (A, Δ, ϵ) coálgebra. São equivalentes:*

(i) m e η são homomorfismos de coálgebras.

(ii) Δ e ϵ são homomorfismos de álgebra.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$. Provemos que $\Delta \circ m = (m \otimes m) \circ \Delta$, mas isso é exatamente o fato de m ser homomorfismo de coálgebra. Demais igualdades são análogas. □

Definição (Biálgebras)**.** Uma biálgebra é uma 5-upla $(A, m, \eta, \Delta, \epsilon)$ tal que (A, m, η) é álgebra, (A, Δ, ϵ) é uma coálgebra e vale uma das duas condições equivalentes do lema anterior.

Exemplo 1. *Seja S monóide e considere $(KS, \Delta, \epsilon, m, \eta)$ onde Δ, ϵ são as cooperações usuais e m, η são as multiplicações usuais. Temos*

$$\Delta(st) = st \otimes st = \Delta(s)\Delta(t).$$

Definição. Seja C uma coálgebra e A uma álgebra. Considere $\mathrm{Hom}_K(C, A)$ como espaço vetorial. Em $\mathrm{Hom}_K(C, A)$ pegue o seguinte produto dito **produto de convolução**:

$$\forall f, g \in \mathrm{Hom}_K(C, A), (f * g)(c) = m((f \otimes g)(\Delta(c))).$$

É fácil ver que $((\mathrm{Hom}_K(C, A), *, \eta\epsilon)$ é uma álgebra, dita **álgebra de convolução de C em A**.

Definição (Álgebra de Hopf)**.** Seja A uma biálgebra tal que $I_A : A \to A$ (a aplicação identidade) possui inverso S em $\mathrm{Hom}_K(A, A) = \mathrm{End}_K(A)$ pelo produto de convolução. Então (A, S) diz-se **álgebra de Hopf com mapa antipodal S**.

Observação. Na notação de Swedleer temos

$$\epsilon(c) \cdot 1 = \eta\epsilon(c) = m \circ (S \otimes I)(\Delta(c)) = S(c_{(1)})c_{(2)} = c_{(1)}S(c_{(2)}).$$

Exemplo 2. *Considere G um grupo e KG com as operações usuais de biálgebra. Considere $S : g \in KG \mapsto g^{-1} \in KG$. Então (KG, S) é uma álgebra de Hopf.*

Observação. $G(KH) = H$ (o conjunto dos elementos group-like KH), em que H é um grupo.

Exemplo 3 (Swedleer's algebra)**.** *Considere $H_4 = K\langle 1, g, gx, x \mid g^2 = 1, x^2 = 0, xg = -gx\rangle$, com*

$$\Delta(g) = g \otimes g, \Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x, \epsilon(g) = 1, \epsilon(x) = 0.$$

Se colocarmos $S(g) = g = g^{-1}$ e $S(x) = -gx$, então $(H_4, \Delta, \epsilon, m, \eta)$ é uma álgebra de Hopf de dimensão 4 não comutativa.

Proposição. *Seja (H, S) álgebra de Hopf. Então*

(i) S é antihomomorfismo de álgebras, isto é, $S(hk) = S(k)S(h)$,

(ii) S é antihomomorfismo de coálgebras, isto é, $\Delta \circ S = \tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta$ e $\epsilon \circ S = \epsilon$, em que $\tau : H \otimes H \to H \otimes H$ é a inversão.

Hints. Em geral, se $\pi : C \to D$ é homomorfismo então $\pi^* : f \in \mathrm{Hom}(D, A) \mapsto f \circ \pi \in \mathrm{Hom}(C, A)$ é homomorfismo de álgebras pelo produto de convolução.

Considere $A \otimes A$, $m^*(Id)$ possui como inverso $m^*(S)$. Sai o resultado com contas à partir desses fatos. □

Justificativa. Seja A álgebra de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e G grupo abeliano finito. Então A é G-graduado se e só se G age sobre A.

Definição (Álgebra de módulo)**.** Seja B uma biálgebra e (A, m, η) uma álgebra tal que A é B-módulo à esquerda, e

$$h(ab) = (h_{(1)}a)(h_{(2)}b), \quad h(1_A) = \epsilon(h)1_A, \quad \forall h \in B, a, b \in A.$$

A diz-ze **álgebra de módulo sobre** B.

Proposição. *Seja S monóide e A álgebra. Então S age sobre A se e só se A é uma KS-álgebra de módulo.*

Proposição. *Seja A uma álgebra e considere*

$$A^\circ = \{f \in A^* \mid f(I) = 0, \text{ para algum ideal } I \subset A \text{ tal que } \dim(A/I) < \infty\}.$$

Então $(A^\circ, \Delta, \epsilon)$ é coálgebra se $\Delta(f)(a \otimes b) = f(ab)$ e $\epsilon = \eta^*$.

Proposição. *Seja $(B, \Delta, \epsilon, m, \eta)$ biálgebra. Então B° possui estrutura de biálgebra também.*

Corolário. *Se B é biálgebra, então $KG(B^*)$ é biálgebra.*

Teorema. *Seja S monóide e A uma álgebra graduada por S. Então A é uma $K(G(H^*))$-álgebra de módulo, em que $H = KS$.*

Corolário. *A é S-graduado se e só se $G(H^*)$ age sobre A.*

Se ocorrer $H = KS$, $H^\circ = (KS)^\circ \simeq KS$, então $G(H^\circ) = S$.